复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理及正则性条件

成龙[1] 夏丹丹[1] 李耀堂[2,*]

(1. 重庆对外经贸学院数学与计算机学院, 重庆, 401520;
2. 云南大学数学与统计学院, 昆明, 650091)

摘 要 本文将矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘定理推广到复区间矩阵, 给出复区间矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘区域, 并证明所给复区间矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘区域包含于已有的复区间矩阵特征值的 Gerschgorin 方盘区域. 最后, 应用复区间矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘定理得到复区间矩阵正则的两个新的充分条件.

关键词 复区间矩阵 特征值 Gerschgorin 圆盘定理 正则性

The Gerschgorin Disk Theorem and Regularity Conditions for Complex Interval Matrices

Cheng Long[1] Xia Dandan[1] Li Yaotang[2,*]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Chongqing University of International Business and Economics, Chongqing 401520, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract In this paper, the Gerschgorin disk theorem on eigenvalues of complex matrices is generalized to complex interval matrices, in which the Gerschgorin disk regions of eigenvalues of complex interval matrices are presented. It is showed that the Gerschgorin disk regions are contained in the Gerschgorin square regions for eigenvalues of complex interval matrices. Then, two new sufficient conditions for the regularity of complex interval matrices are obtained by applying the Gerschgorin disk theorem of complex interval matrices.

Key words Complex interval matrix Eigenvalue Gerschgorin disk theorem Regularity
doi: 10.3969/j.issn.1006-8074.2024.01.008

1 引言

控制系统、振动系统、质量结构系统、汽车悬架系统等系统的特性由系统的雅可比矩阵特征值的大小决定[1−4]. 由于面对系统的各种不确定因素, 系统的雅可比矩阵的元素往往取值于某个区间中. 此时系统的特性由区间雅可比矩阵的特征值大小决定. 因此, 对区间矩阵特征值的估计具有重要的应用意义.

国家自然科学基金 (No. 11861077) 和重庆对外经贸学院科学研究项目基金 (Nos. KYKJ202208, KYZK202311) 资助
通信作者: 李耀堂 (1958−), 教授, 研究方向: 数值代数、张量 (矩阵) 谱理论及其应用; E-mail: liyaotang@yun.edu.cn
收稿日期: 2023 年 11 月 8 日

区间矩阵特征值的估计问题吸引了众多学者的关注和研究[5-11,13-19]. 1982 年 Deif 利用区间矩阵特征值不等式和非线性规划理论, 在特征向量分量符号不变的条件下, 得到了实对称区间矩阵特征值的算法[5]. 由于在应用中特征向量分量符号不变的条件往往很难满足和验证, 因此该算法不能得到广泛应用. 1998 年 Rohn 利用实区间矩阵的中点矩阵、半径矩阵、以及其组成的实对称矩阵的特征值给出了实区间矩阵特征值的实部和虚部的估计式[6]. 2008 年 Hertz 推广了文献 [6] 中的结果, 给出了复区间矩阵特征值的实部和虚部的估计式[7]. 另一方面, 对于某些实际应用问题, 往往并不需要精确计算出区间矩阵的特征值, 只需要知道其特征值在复平面上的大概位置即可. 例如对鲁棒稳定控制器设计问题中的连续时间区间动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A^I x(t),$$

当 $\mathrm{Re}\left(\lambda\left(A^I\right)\right) < 0$ 时, 我们即可得知它是 Hurwitz 稳定的[8,9], 其中 $\lambda(A^I)$ 表示区间矩阵 A^I 的特征值. 所以我们有时只需研究区间矩阵特征值的包含集[10,11].

本文将复矩阵的 Ggerschgorin 圆盘定理拓展到复区间矩阵, 得到复区间矩阵特征值的 Ggerschgorin 圆盘区域.

2 预备知识

本节介绍实区间矩阵、复区间矩阵、实对称区间矩阵的概念及相关结论.

定义 2.1 ([12]) 设 $A = (a_{jk})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 对任意的 $j = 1, 2, \cdots, m$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 若 $a_{jk} \geq 0$, 则称 $A \geq 0$; 若 $a_{jk} > 0$, 则称 $A > 0$; 若 $a_{jk} - b_{jk} \geq 0$, 则称 $A \geq B$; 若 $a_{jk} - b_{jk} > 0$, 则称 $A > B$.

1966 年, Moore 提出了实区间矩阵的概念, 即元素为闭区间的矩阵, 其定义如下.

定义 2.2 ([13]) 设对任意的 $j = 1, 2, \cdots, m$, $k = 1, 2, \cdots, n$, $\underline{a_{jk}}, \overline{a_{jk}} \in \mathbb{R}$, 且 $\overline{a_{jk}} \geq \underline{a_{jk}}$. 称矩阵集合

$$A^I = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} : \overline{A} \geq A \geq \underline{A}\right\}$$

为 $m \times n$ 阶实区间矩阵, 其中

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \cdots & \underline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{a_{m2}} & \cdots & \underline{a_{mn}} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}.$$

记

$$A^I \triangleq [\underline{A}, \overline{A}] \triangleq ([\underline{a_{jk}}, \overline{a_{jk}}])_{m\times n} = \begin{pmatrix} [\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}] & [\underline{a_{12}}, \overline{a_{12}}] & \cdots & [\underline{a_{1n}}, \overline{a_{1n}}] \\ [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] & \cdots & [\underline{a_{2n}}, \overline{a_{2n}}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\underline{a_{m1}}, \overline{a_{m1}}] & [\underline{a_{m2}}, \overline{a_{m2}}] & \cdots & [\underline{a_{mn}}, \overline{a_{mn}}] \end{pmatrix},$$

$A_c=\frac{1}{2}(\underline{A}+\overline{A}), A_\Delta=\frac{1}{2}(\overline{A}-\underline{A})$, 则 A^I 还可表示为 $[A_c-A_\Delta, A_c+A_\Delta]$, 其中 $\underline{A}$ 和 $\overline{A}$ 分别称为 A^I 的下界矩阵和上界矩阵, A_c 和 A_Δ 分别称为 A^I 的中点矩阵和半径矩阵. 若 $m=n$, 则称 A^I 为 n 阶实区间矩阵.

定义 2.3 ([7]) 设 A^I, B^I 是 $m\times n$ 阶实区间矩阵. 称矩阵集合

$$A^I+\mathrm{i}B^I=\left\{A+\mathrm{i}B : A\in A^I, B\in B^I\right\}$$

为 $m\times n$ 阶复区间矩阵, 其中 i 为虚数单位. 记

$$A^I+\mathrm{i}B^I\triangleq[\underline{A},\overline{A}]+\mathrm{i}[\underline{B},\overline{B}]\triangleq\left([\underline{a_{jk}},\overline{a_{jk}}]+\mathrm{i}[\underline{b_{jk}},\overline{b_{jk}}]\right)_{m\times n}.$$

复区间矩阵 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 的中点矩阵, 半径矩阵分别记为 $A_c+\mathrm{i}B_c, A_\Delta+\mathrm{i}B_\Delta$. 若 $m=n$, 则称 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 为 n 阶复区间矩阵.

定义 2.4 ([5]) 设实区间矩阵 $A^I=\left([\underline{a_{jk}},\overline{a_{jk}}]\right)_{n\times n}$, 且对任意的 $j,k\in N:=\{1,2,\cdots,n\}$, 有

$$[\underline{a_{jk}},\overline{a_{jk}}]=[\underline{a_{kj}},\overline{a_{kj}}].$$

称

$$A^S=\left\{A\in A^I : A=A^T\right\}$$

为 n 阶实对称区间矩阵. 在不引起混淆的情况下, 也记 $A^S\triangleq([\underline{a_{jk}},\overline{a_{jk}}])_{n\times n}\triangleq[A_c-A_\Delta, A_c+A_\Delta]$, 其中 A_c, A_Δ 为实对称矩阵.

定义 2.5 ([6]) 设 A^I 是 n 阶实区间矩阵. 称 A^I 中所有矩阵的特征值组成的集合为 A^I 的谱, 记为 $\sigma(A^I)$, 即

$$\sigma(A^I)=\left\{\lambda(A) : A\in A^I\right\},$$

其中 $\lambda(A)$ 表示实矩阵 A 的特征值.

定义 2.6 ([7]) 设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 称 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 中所有矩阵的特征值组成的集合为 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 的谱, 记为 $\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)$, 即

$$\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)=\left\{\lambda(A+\mathrm{i}B) : A\in A^I, B\in B^I\right\},$$

其中 $\lambda(A+\mathrm{i}B)$ 表示复矩阵 $A+\mathrm{i}B$ 的特征值.

定义 2.7 ([5]) 设 A^S 是 n 阶实对称区间矩阵. 称 A^S 中所有矩阵的特征值组成的集合为 A^S 的谱, 记为 $\sigma(A^S)$, 即

$$\sigma(A^S)=\left\{\lambda(A) : A\in A^S\right\},$$

其中 $\lambda(A)$ 表示实对称矩阵 A 的特征值.

定义 2.8 ([18]) 设实区间矩阵 $A^I=\left([\underline{a_{jk}},\overline{a_{jk}}]\right)_{m\times n}$. 称实矩阵 $\left(\max\left\{|\underline{a_{jk}}|,|\overline{a_{jk}}|\right\}\right)_{m\times n}$ 为 A^I 的绝对值矩阵, 记为 $|A^I|$.

定义 2.9 设复区间矩阵 $A^I + \mathrm{i}B^I = \left([\underline{a_{jk}}, \overline{a_{jk}}] + \mathrm{i}[\underline{b_{jk}}, \overline{b_{jk}}]\right)_{m\times n}$. 称矩阵集合

$$\left\{A^T + \mathrm{i}B^T : A \in A^I, B \in B^I\right\}$$

为 $A^I + \mathrm{i}B^I$ 的转置区间矩阵, 记为

$$(A^I + \mathrm{i}B^I)^T = \left([\underline{a_{kj}}, \overline{a_{kj}}] + \mathrm{i}[\underline{b_{kj}}, \overline{b_{kj}}]\right)_{n\times m}.$$

由于转置变换不改变 n 阶复矩阵 $A + \mathrm{i}B$ 的特征值, 故 $A + \mathrm{i}B$ 与其转置区间矩阵 $(A + \mathrm{i}B)^T$ 有相同的谱, 即 $\sigma(A + \mathrm{i}B) = \sigma((A + \mathrm{i}B)^T)$. 那么 n 阶复区间矩阵 $A^I + \mathrm{i}B^I$ 是否有相同的结果呢? 下面的定理给出了该问题的肯定回答.

定理 2.1 设 $A^I + \mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵, 则 $A^I + \mathrm{i}B^I$ 与其转置区间矩阵 $(A^I + \mathrm{i}B^I)^T$ 有相同的谱, 即

$$\sigma(A^I + \mathrm{i}B^I) = \sigma((A^I + \mathrm{i}B^I)^T).$$

证明 首先证明 $\sigma(A^I + \mathrm{i}B^I) \subseteq \sigma((A^I + \mathrm{i}B^I)^T)$. 对任意的 $A + \mathrm{i}B \in A^I + \mathrm{i}B^I$, 由于转置变换不改变复矩阵 $A + \mathrm{i}B$ 的特征值, 故矩阵 $A + \mathrm{i}B$ 与其转置矩阵 $(A + \mathrm{i}B)^T$ 有相同谱, 即 $\sigma(A + \mathrm{i}B) = \sigma((A + \mathrm{i}B)^T)$. 又 $(A + \mathrm{i}B)^T \in (A^I + \mathrm{i}B^I)^T$, 故

$$\sigma(A + \mathrm{i}B) \subseteq \sigma((A^I + \mathrm{i}B^I)^T).$$

再由 $A + \mathrm{i}B$ 的任意性, 得

$$\sigma(A^I + \mathrm{i}B^I) \subseteq \sigma((A^I + \mathrm{i}B^I)^T).$$

再证明 $\sigma((A^I + \mathrm{i}B^I)^T) \subseteq \sigma(A^I + \mathrm{i}B^I)$. 由于复区间矩阵 $(A^I + \mathrm{i}B^I)^T$ 的转置区间矩阵为 $A^I + \mathrm{i}B^I$, 即 $((A^I + \mathrm{i}B^I)^T)^T = A^I + \mathrm{i}B^I$, 故 $\sigma((A^I + \mathrm{i}B^I)^T) \subseteq \sigma(A^I + \mathrm{i}B^I)$.

综上即得: $\sigma(A^I + \mathrm{i}B^I) = \sigma((A^I + \mathrm{i}B^I)^T)$. 证毕.

一般来讲, n 阶实区间矩阵 A^I 的谱 $\sigma(A^I)$ 是复数域上的一个集合. 但对于 n 阶实对称区间矩阵 A^S, 因为 A^S 中的矩阵都是实对称矩阵, 由实对称矩阵的特征值都是实数知 $\sigma(A^S)$ 为实数域上的集合. 1987 年, Rohn 给出了 $\sigma(A^S)$ 在实轴上的分布情况 (定理 2.2). 在下文中, 实对称矩阵 $A{=}(a_{jk})_{n\times n}$ 的特征值 $\lambda_j(A)$ 都按升序排列:

$$\lambda_1(A) \le \lambda_2(A) \le \cdots \le \lambda_n(A).$$

定理 2.2 ([15]) 记 $\lambda_j(A^S) = \left\{\lambda_j(A) : A \in A^S\right\}$, 则 $\lambda_j(A^S)$ 为实数轴上的闭区间, 即

$$\lambda_j(A^S) = [\underline{\lambda_j}(A^S), \overline{\lambda_j}(A^S)],\ j \in N,$$

其中 $N := \{1, 2, \cdots, n\}$.

注 2.1 称 $\lambda_j(A^S)$ 为实对称区间矩阵 A^S 的第 j 个特征值区间, 简称为 A^S 的第 j 个特征值；称 $\lambda_n(A^S), \lambda_1(A^S)$ 分别为 A^S 的最大特征值和最小特征值；称 $\underline{\lambda_j}(A^S), \overline{\lambda_j}(A^S)$ 分别为 A^S 的第 j 个特征值的下确界和上确界.

注 2.2 由定理 2.2 知实对称区间矩阵 A^S 的谱由 n 个闭区间组成, 即

$$\sigma(A^S) = \bigcup_{j\in N} \lambda_j(A^S) = \bigcup_{j\in N} [\underline{\lambda_j}(A^S), \overline{\lambda_j}(A^S)].$$

由于精确计算 A^S 各特征值的上、下确界是 NP-hard 问题 [14]. 2005 年, Rohn 给出了 A^S 各特征值的如下估计.

定理 2.3 ([17]) 设 A^S 是 n 阶实对称区间矩阵, $\lambda_j(A^S)$ 为 A^S 的第 j 个特征值区间. 则

$$\lambda_j(A^S) \subseteq [\lambda_j(A_c) - \rho(A_\Delta), \lambda_j(A_c) + \rho(A_\Delta)],$$

其中 $\rho(A_\Delta)$ 表示 A_Δ 的谱半径.

定理 2.3 表明 $\lambda_j(A_c) + \rho(A_\Delta), \lambda_j(A_c) - \rho(A_\Delta)$ 分别是 A^S 的第 j 个特征值的上界和下界, 即

$$\overline{\lambda_j}(A^S) \leq \lambda_j(A_c) + \rho(A_\Delta), \quad \underline{\lambda_j}(A^S) \geq \lambda_j(A_c) - \rho(A_\Delta).$$

定理 2.3 给出的 A^S 各特征值区间的宽度相同, 都是 $2\rho(A_\Delta)$, 这就可能使得部分特征值区间的估计不够准确.

2010 年, Hladík, Daney 和 Tsigarida 提供了一种求实对称区间矩阵 A^S 的最大特征值上界的方法.

定理 2.4 ([18]) 设 A^S 是 n 阶实对称区间矩阵, $\lambda_n(A^S)$ 为 A^S 的最大特征值. 则

$$\overline{\lambda_n}(A^S) \leq \lambda_n(\left|A^S\right|),$$

其中 $\left|A^S\right|$ 为 A^S 的绝对值矩阵.

1998 年, Rohn 利用实区间矩阵的中点矩阵、半径矩阵以及其组成的实对称矩阵的特征值给出了实区间矩阵特征值的实部和虚部的估计式.

定理 2.5 ([6]) 设 A^I 是 n 阶实区间矩阵, A_c, A_Δ 分别为 A^I 的中点矩阵和半径矩阵. 则对任意的 $\lambda + \mathrm{i}\mu \in \sigma(A^I)$, 有

$$\lambda_1(A'_c) - \rho(A'_\Delta) \leq \lambda \leq \lambda_n(A'_c) + \rho(A'_\Delta),$$

$$\lambda_1(A''_c) - \rho(A''_\Delta) \leq \mu \leq \lambda_n(A''_c) + \rho(A''_\Delta),$$

其中

$$\begin{cases} A'_c = \dfrac{1}{2}\left(A_c + A_c^T\right), \\ A'_\Delta = \dfrac{1}{2}\left(A_\Delta + A_\Delta^T\right), \\ A''_c = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(A_c - A_c^T\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(A_c^T - A_c\right) & 0 \end{pmatrix}, \\ A''_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & A'_\Delta \\ A'_\Delta & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

2008 年, Hertz 将定理 2.5 进行推广, 给出了复区间矩阵特征值的实部和虚部的估计式.

定理 2.6 ([7]) 设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 则对任意的 $\lambda+\mathrm{i}\mu\in\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)$, 有

$$\begin{aligned}
\lambda \leq\ & \lambda_n\left(\tfrac{1}{2}\left(A_c+A_c^T\right)\right)+\rho\left(\tfrac{1}{2}\left(A_\Delta+A_\Delta^T\right)\right)+\lambda_n\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(B_c^T-B_c\right) \\ \frac{1}{2}\left(B_c-B_c^T\right) & 0 \end{pmatrix} \\
& +\rho\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(B_\Delta^T+B_\Delta\right) \\ \frac{1}{2}\left(B_\Delta^T+B_\Delta\right) & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda \geq\ & \lambda_1\left(\tfrac{1}{2}\left(A_c+A_c^T\right)\right)-\rho\left(\tfrac{1}{2}\left(A_\Delta+A_\Delta^T\right)\right)+\lambda_1\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(B_c^T-B_c\right) \\ \frac{1}{2}\left(B_c-B_c^T\right) & 0 \end{pmatrix} \\
& -\rho\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(B_\Delta^T+B_\Delta\right) \\ \frac{1}{2}\left(B_\Delta^T+B_\Delta\right) & 0 \end{pmatrix}, \\
\mu \leq\ & \lambda_n\left(\tfrac{1}{2}\left(B_c+B_c^T\right)\right)+\rho\left(\tfrac{1}{2}\left(B_\Delta+B_\Delta^T\right)\right)+\lambda_n\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(A_c-A_c^T\right) \\ \frac{1}{2}\left(A_c^T-A_c\right) & 0 \end{pmatrix} \\
& +\rho\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(A_\Delta^T+A_\Delta\right) \\ \frac{1}{2}\left(A_\Delta^T+A_\Delta\right) & 0 \end{pmatrix}, \\
\mu \geq\ & \lambda_1\left(\tfrac{1}{2}\left(B_c+B_c^T\right)\right)-\rho\left(\tfrac{1}{2}\left(B_\Delta+B_\Delta^T\right)\right)+\lambda_1\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(A_c-A_c^T\right) \\ \frac{1}{2}\left(A_c^T-A_c\right) & 0 \end{pmatrix} \\
& -\rho\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(A_\Delta^T+A_\Delta\right) \\ \frac{1}{2}\left(A_\Delta^T+A_\Delta\right) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2022 年 Maiti 与 Chakraverty 给出了复区间矩阵的 Gerschgorin 方盘定理.

定理 2.7 ([11], Gerschgorin 方盘定理) 设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 则

$$\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)\subseteq\Gamma(A^I+\mathrm{i}B^I):=\bigcup_{j\in N}\Gamma_j(A^I+\mathrm{i}B^I),$$

其中 i 为虚数单位,

$$\Gamma_j(A^I+\mathrm{i}B^I)=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)\in[\underline{a_{jj}}-r_j(A^I+\mathrm{i}B^I),\overline{a_{jj}}+r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)],$$

$$\mathrm{Im}(z)\in[\underline{b_{jj}}-r_j(A^I+\mathrm{i}B^I),\overline{b_{jj}}+r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)]\},$$

$$r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)=\sum_{s\neq j}\sqrt{(c_{js})^2+(d_{js})^2},\quad (c_{jk})=\left|A^I\right|,\quad (d_{jk})=\left|B^I\right|.$$

定理 2.7 中的 $\Gamma(A^I+\mathrm{i}B^I)$ 是复平面中 n 个矩形集合 $\Gamma_j(A^I+\mathrm{i}B^I)$ 之并. 因此, 称该定理为复区间矩阵的 Gerschgorin 方盘定理, 称 $\Gamma_j(A^I+\mathrm{i}B^I)$ 为复区间矩阵 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 的第 j 个 Gerschgorin 方盘.

为叙述方便, 下面给出复平面中点到集合的距离的定义和复矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘定理.

定义 2.10 ([12]) 设 z 为复平面中的任意一点, Δ 为复平面中的任意一个集合. 定义点 z 与集合 Δ 的距离为 $d(z,\Delta)=\inf\{d(z,x):x\in\Delta\}$, 其中 $d(z,x)$ 表示点 z 与点 x 的欧氏距离.

定理 2.8 ([12], Gerschgorin **圆盘定理**)　设 $A=(a_{jk})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\sigma(A)$ 为 A 的谱. 则

$$\sigma(A)\subseteq\Gamma(A):=\bigcup_{j\in N}\Gamma_j(A),$$

其中 $\Gamma_j(A)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{jj}|\le r_j(A):=\sum\limits_{k\neq j,k\in N}|a_{jk}|\right\}$.

3　复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理

定理 2.7 给出的复区间矩阵特征值的 Gerschgorin 方盘区域由 n 个矩形区域组成. 下面给出复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理, 并讨论其与 Gerschgorin 方盘定理之间的关系.

定理 3.1 (Gerschgorin **圆盘定理**)　设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 则

$$\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)\subseteq G(A^I+\mathrm{i}B^I):=\bigcup_{j\in N}G_j(A^I+\mathrm{i}B^I),$$

其中 i 为虚数单位, $G_j(A^I+\mathrm{i}B^I)=\left\{z\in\mathbb{C}:d(z,\Delta_j)\le r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)\right\}$, Δ_j 表示复平面中以 $\underline{a_{jj}}+\mathrm{i}\underline{b_{jj}}$, $\underline{a_{jj}}+\mathrm{i}\overline{b_{jj}}$, $\overline{a_{jj}}+\mathrm{i}\underline{b_{jj}}$, $\overline{a_{jj}}+\mathrm{i}\overline{b_{jj}}$ 为顶点的矩形区域, $d(z,\Delta_j)$ 表示复平面中点 z 到矩形区域 Δ_j 的距离, $r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)=\sum\limits_{s\neq j}\sqrt{(c_{js})^2+(d_{js})^2}$, $(c_{jk})=\left|A^I\right|$, $(d_{jk})=\left|B^I\right|$.

证明　对任意的 $A+\mathrm{i}B\in A^I+\mathrm{i}B^I$, 由定理 2.8 知

$$\sigma(A+\mathrm{i}B)\subseteq\Gamma(A+\mathrm{i}B):=\bigcup_{j\in N}\Gamma_j(A+\mathrm{i}B), \tag{3.1}$$

其中 $\Gamma_j(A+\mathrm{i}B)=\{z\in\mathbb{C}:|z-(a_{jj}+b_{jj}\mathrm{i})|\le r_j(A+\mathrm{i}B)\}$. 由 $A+\mathrm{i}B\in A^I+\mathrm{i}B^I$ 和 $(c_{jk})=\left|A^I\right|$, $(d_{jk})=\left|B^I\right|$ 知, 对任意 $j\in N$,

$$r_j(A+\mathrm{i}B)\le r_j(A^I+\mathrm{i}B^I).$$

于是

$$\Gamma_j(A+\mathrm{i}B)\subseteq\left\{z\in\mathbb{C}:|z-(a_{jj}+b_{jj}\mathrm{i})|\le r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)\right\}. \tag{3.2}$$

又因为

$$a_{jj}\in[\underline{a_{jj}},\overline{a_{jj}}],\quad b_{jj}\in[\underline{b_{jj}},\overline{b_{jj}}],$$

即 $a_{jj}+b_{jj}\mathrm{i}\in\Delta_j$, 由距离 $d(z,\Delta_j)$ 的定义知

$$d(z,\Delta_j)\le|z-(a_{jj}+b_{jj}\mathrm{i})|.$$

再由 (3.2) 式得

$$\Gamma_j(A+\mathrm{i}B)\subseteq\left\{z\in\mathbb{C}:d(z,\Delta_j)\le r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)\right\}.$$

记

$$G_j(A^I+\mathrm{i}B^I)=\left\{z\in\mathbb{C}:d(z,\Delta_j)\le r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)\right\}.$$

则有 $\Gamma_j(A+\mathrm{i}B)\subseteq G_j(A^I+\mathrm{i}B^I)$. 于是由 (3.1) 式得

$$\sigma(A+\mathrm{i}B)\subseteq G(A^I+\mathrm{i}B^I).$$

再由 $A+\mathrm{i}B\in A^I+\mathrm{i}B^I$ 的任意性即得 $\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)\subseteq G(A^I+\mathrm{i}B^I)$. 证毕.

定理 3.1 中的 $G(A^I+\mathrm{i}B^I)$ 是复平面中 n 个"圆盘" $G_1(A^I+\mathrm{i}B^I),G_2(A^I+\mathrm{i}B^I),\cdots,G_n(A^I+\mathrm{i}B^I)$ 之并. 称定理 3.1 为复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理, 称 $G_j(A^I+\mathrm{i}B^I)$ 为复区间矩阵 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 的第 j 个 Gerschgorin 圆盘.

上述定理是利用复区间矩阵的行元素得到的结论, 利用其列元素也可得到下面列形式的复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理. 下面利用定理 2.1 给出其另一种证明方法.

定理 3.2 (**Gerschgorin 圆盘定理**) 设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 则

$$\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)\subseteq W(A^I+\mathrm{i}B^I):=\bigcup_{j\in N}W_j(A^I+\mathrm{i}B^I),$$

其中 i 为虚数单位, $W_j(A^I+\mathrm{i}B^I)=\left\{z\in\mathbb{C}:d(z,\Delta_j)\le l_j(A^I+\mathrm{i}B^I)\right\}$, $l_j(A^I+\mathrm{i}B^I)=\sum\limits_{s\neq j}\sqrt{(c_{sj})^2+(d_{sj})^2}$, Δ_j, $d(z,\Delta_j)$, (c_{jk}) 和 (d_{jk}) 的意义见定理 3.1 .

证明 由定理 2.1 知, 复区间矩阵 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 与其转置区间矩阵 $(A^I+\mathrm{i}B^I)^T$ 有相同的谱, 因为 $(A^I+\mathrm{i}B^I)^T$ 仍是复区间矩阵, 对 $(A^I+\mathrm{i}B^I)^T$ 应用定理 3.1 得

$$\sigma((A^I+\mathrm{i}B^I)^T)\subseteq G((A^I+\mathrm{i}B^I)^T):=\bigcup_{j\in N}G_j((A^I+\mathrm{i}B^I)^T),$$

其中

$$G_j((A^I+\mathrm{i}B^I)^T)=\left\{z\in\mathbb{C}:d(z,\Delta_j)\le r_j((A^I+\mathrm{i}B^I)^T)\right\}.$$

又对任意 $j\in N$, 有

$$r_j((A^I+\mathrm{i}B^I)^T)=l_j(A^I+\mathrm{i}B^I),$$

故 $G_j((A^I+\mathrm{i}B^I)^T)=W_j(A^I+\mathrm{i}B^I))$. 再由 j 的任意性即得

$$\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)=\sigma((A^I+\mathrm{i}B^I)^T)\subseteq G((A^I+\mathrm{i}B^I)^T)=W(A^I+\mathrm{i}B^I).$$

定理 3.1 和定理 3.2 表明同时利用复区间矩阵的行和列的元素可以给出其更为精确的特征值定位集. 我们有如下推论.

推论 3.1 设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 则

$$\sigma(A^I+\mathrm{i}B^I)\subseteq G(A^I+\mathrm{i}B^I)\cap W(A^I+\mathrm{i}B^I).$$

关于复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘区域与 Gerschgorin 方盘区域的关系, 我们有如下结论.

定理 3.3 设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 则

$$G(A^I+\mathrm{i}B^I)\subseteq\Gamma(A^I+\mathrm{i}B^I).$$

证明 设 $z \in G(A^I + \mathrm{i}B^I)$, 则存在 $j_0 \in N$ 使得

$$d(z, \Delta_{j_0}) \leq r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I).$$

因为 Δ_{j_0} 表示复平面内以 $\underline{a_{j_0j_0}} + \mathrm{i}\underline{b_{j_0j_0}}, \underline{a_{j_0j_0}} + \mathrm{i}\overline{b_{j_0j_0}}, \overline{a_{j_0j_0}} + \mathrm{i}\underline{b_{j_0j_0}}, \overline{a_{j_0j_0}} + \mathrm{i}\overline{b_{j_0j}}$ 为顶点的矩形区域, 所以 Δ_{j_0} 是闭集, 故存在点 $a_{j_0j_0} + \mathrm{i}b_{j_0j_0} \in \Delta_{j_0}$, 使得

$$d(z, \Delta_{j_0}) = |z - (a_{j_0j_0} + \mathrm{i}b_{j_0j_0})|,$$

从而

$$|z - (a_{j_0j_0} + \mathrm{i}b_{j_0j_0})| \leq r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I). \tag{3.3}$$

令 $z = x + \mathrm{i}y$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$. 由 (3.3) 式得

$$|(x - a_{j_0j_0}) + \mathrm{i}(y - b_{j_0j_0})| \leq r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I),$$

从而

$$\begin{cases} |(x - a_{j_0j_0})| \leq r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I), \\ |(y - b_{j_0j_0})| \leq r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I). \end{cases}$$

由于 $a_{j_0j_0} \in [\underline{a_{j_0j_0}}, \overline{a_{j_0j_0}}]$, $b_{j_0j_0} \in [\underline{b_{j_0j_0}}, \overline{b_{j_0j_0}}]$, 故

$$\begin{cases} x \in [\underline{a_{j_0j_0}} - r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I), \overline{a_{j_0j_0}} + r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I)], \\ y \in [\underline{b_{j_0j_0}} - r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I), \overline{b_{j_0j_0}} + r_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I)], \end{cases}$$

即点 $z \in \Gamma_{j_0}(A^I + \mathrm{i}B^I) \subseteq \Gamma(A^I + \mathrm{i}B^I)$. 再由 z 的任意性得

$$G(A^I + \mathrm{i}B^I) \subseteq \Gamma(A^I + \mathrm{i}B^I).$$

证毕.

定理 3.3 证明了复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘区域不比复区间矩阵的 Gerschgorin 方盘区域 “大”.

下面通过例子说明在某些情况下复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘区域比 Gerschgorin 方盘区域 “小”. 在下面的例子中, 红色区域表示通过蒙特卡洛模拟给出的复区间矩阵特征值的近似区域[19], 蓝色区域表示由 Maiti 与 Chakraverty 的方法给出的 Gerschgorin 方盘区域[11], 绿色区域表示本文给出的 Gerschgorin 圆盘区域.

例 3.1 对于实区间矩阵

$$A^I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & [-1.399, -0.001] & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}.$$

其特征值的估计见图 1.

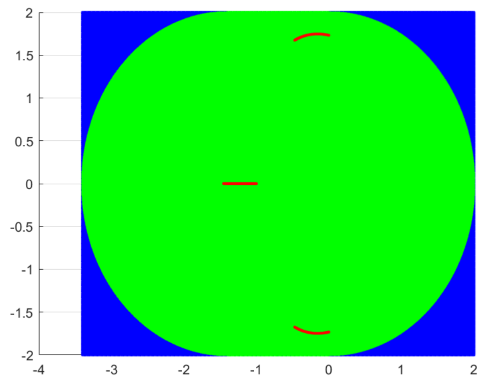

图 1　实区间矩阵 A^I 的 Gerschgorin 区域

例 3.2　对于实区间矩阵

$$A^I=\begin{pmatrix}[0,1] & [0.1,0.2] & [0.11,0.15] & [-0.3,-0.2]\\ [0.13,0.16] & [-3,-2] & [0.4,0.5] & [-0.4,-0.2]\\ [0.14,0.17] & [0.22,0.28] & [6,9] & [-0.7,-0.5]\\ [0.3,0.5] & [-0.1,-0.01] & [0.2,0.3] & [10,12]\end{pmatrix}.$$

其特征值的估计见图 2.

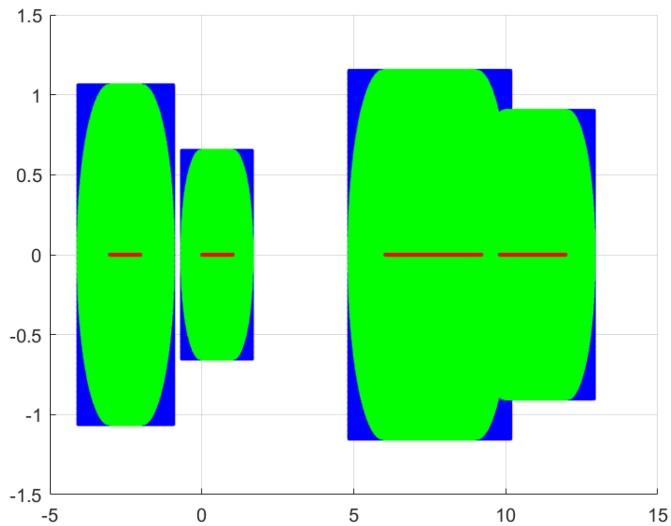

图 2　实区间矩阵 A^I 的 Gerschgorin 区域

例 3.3　对于复区间矩阵 $A^I+\mathrm{i}B^I$, 其中

$$A^I=\begin{pmatrix}[1,2] & [0.5,0.7]\\ [-0.9,-0.7] & [5,8]\end{pmatrix},\ B^I=\begin{pmatrix}[3,4] & [0.3,0,4]\\ [0.8,0.9] & [6,8]\end{pmatrix}.$$

其特征值的估计见图 3.

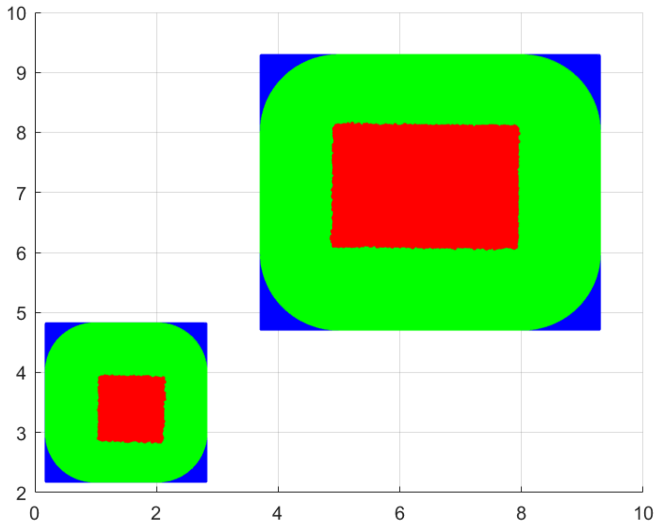

图 3　复区间矩阵 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 的 Gerschgorin 区域

以上数值例子表明本文所给复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理比 Maiti 与 Chakraverty 所给复区间矩阵的 Gerschgorin 方盘定理更精确.

4　区间矩阵正则的两个充分条件

正则性是区间矩阵的重要性质, 在区间线性方程组的可解性[20] 和绝对值方程组解的存在性[21] 等方面都有重要应用. 然而, 关于复区间矩阵正则性的判断却是 NP-hard 问题[22], 于是寻找区间矩阵正则性的容易验证的充分条件成为学者们关注的重要问题[23,24]. 本节应用复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理 3.1 和 3.2, 给出判定复区间矩阵正则性的两个充分条件.

定义 4.1 ([23])　设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 若对任意的 $A+\mathrm{i}B\in A^I+\mathrm{i}B^I$, 均有 $A+\mathrm{i}B$ 是非奇异矩阵, 则称复区间矩阵 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是正则的, 否则称 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是非正则的.

定理 4.1　设 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 若对任意的 $j\in N$ 都有

$$d(0,\Delta_j)>r_j(A^I+\mathrm{i}B^I), \tag{4.1}$$

则 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是正则的, 其中 Δ_j 和 $r_j(A^I+\mathrm{i}B^I)$ 的意义见定理 3.1, $d(0,\Delta_j)$ 表示复平面中原点 0 到矩形区域 Δ_j 的距离.

证明　若 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是非正则的, 则由定义 4.1 知存在奇异矩阵 $A+\mathrm{i}B\in A^I+\mathrm{i}B^I$, 即 0 是 $A+\mathrm{i}B$ 的特征值. 于是由 $d(0,\Delta_j)$ 的定义知, 存在 $j_0\in N$, 使得

$$d(0,\Delta_{j_0})\le r_{j_0}(A^I+\mathrm{i}B^I),$$

这与 (4.1) 式矛盾, 故 $A^I+\mathrm{i}B^I$ 是正则的. 证毕.

类似地, 有如下定理.

定理 4.2 设 $A^I + \mathrm{i}B^I$ 是 n 阶复区间矩阵. 若对任意的 $j \in N$, 有

$$d(0, \Delta_j) > l_j(A^I + \mathrm{i}B^I),$$

则 $A^I + \mathrm{i}B^I$ 是正则的, 其中 Δ_j 和 $l_j(A^I + \mathrm{i}B^I)$ 的意义见定理 3.2.

5 总结

本文将复矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理推广到复区间矩阵, 给出了复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理, 并从理论和算例两方面阐述了本文所给复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘区域比复区间矩阵的 Gerschgorin 方盘区域更精确. 然后, 应用复区间矩阵的 Gerschgorin 圆盘定理得到了复区间矩阵正则的两个新的充分条件.

参考文献

[1] Shatyrko A V, Khusainov D Y, Diblik J, et al. Estimates of perturbations of nonlinear indirect interval control system of neutral type[J]. Journal of Automation and Information Sciences, 2011, 43: 13-28.

[2] Dimarogonas A D. Interval analysis of vibrating systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 183: 739-749.

[3] Qiu Z P, Chen S, Elishakoff I. Bounds of eigenvalues for structures with an interval description of uncertain-but-non-random parameters[J]. Chaos Solitons and Fractals, 1996, 7: 425-434.

[4] Qiu Z P, Müller P C, Frommer A. An approximate method for the standard interval eigenvalue problem of real non-symmetric interval matrices[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2010, 17: 239-251.

[5] Deif A S. Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers (2nd Edition)[M]. Australia: Abacus Press, 1982.

[6] Rohn J. Bounds on eigenvalues of interval matrices[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2010, 78: 1049-1050.

[7] Hertz D. Interval Analysis: Eigenvalue Bounds of Interval Matrices[M]. Boston: Springer, 2008.

[8] Heinen J A. Sufficient conditions for stability of interval matrices[J]. International Journal of Control, 1984, 39: 1323-1328.

[9] Juang Y T, Shao C. Stability analysis of dynamic interval systems[J]. International Journal of Control, 1989, 49: 1401-1408.

[10] Xu S J, Rachid A. Generalized gerschgorin disc and stability analysis of dynamic interval systems[J]. International Conference on Control, 1996, 01: 276-280.

[11] Maiti S, Chakraverty S. Gershgorin disk theorem in complex interval matrices[J]. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 2022, 71: 65-76.

[12] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: University Press, 1985.

[13] Moore R E. Interval Analysis[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.

[14] Hertz D. The extreme eigenvalues and stability of real symmetric interval matrices[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I Fundamental Theory and Applications, 1992, 37: 532-535.

[15] Rohn J. Eigenvalues of a symmetric interval matrix[J]. Freiburger Intervall-berichte B7/1d, 1987, 19: 67–72.

[16] Hladík M. Complexity issues for the symmetric interval eigenvalue problem[J]. Open Mathematics, 2014, 13: 157–164.

[17] Rohn J. Positive definiteness and stability of interval matrices[J]. Siam Journal on Matrix Analysis and Applications, 2006, 15: 175–184.

[18] Hladík M, Daney D, Tsigarida E. Bounds on real eigenvalues and singular values of interval matrices[J]. Siam Journal on Matrix Analysis and Applications, 2010, 31: 2116–2129.

[19] Hladík M. Bounds on eigenvalues of real and complex interval matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(10): 5584–5591.

[20] Shary S P. Solvability of interval linear equations and data analysis under uncertainty[J]. Automation and Remote Control, 2012, 73: 310–322.

[21] Wang H, Liu H, Cao S. A verification method for enclosing solutions of absolute value equations[J]. Collectanea Mathematica, 2013, 1: 64.

[22] Poljak S, Rohn J. Checking robust nonsingularity is NP-hard[J]. Mathematics of Control Signals and Systems, 1993, 6: 1–9.

[23] Rohn J. Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey[J]. The electronic journal of linear algebra ELA, 2009, 18: 500–512.

[24] Pasca I. Formally Verified Conditions for Regularity of Interval Matrices[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2010.